

Ejercicio 1 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ para $x \neq 1, -1$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . (1'25 puntos)
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (1'25 puntos)

Solución

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ para $x \neq 1, -1$.

(a)

Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

$x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$; la recta $x = -1$ es una A.V. de la gráfica de $f(x)$.

Posición relativa $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$; la recta $x = 1$ es una A.V. de la gráfica de $f(x)$.

Posición relativa $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador una unidad más que el grado del denominador, $f(x)$ tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = mx + n$ con

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$. Como hay A.O en $\pm\infty$, f no tiene

asíntotas horizontales (A.H.) en $\pm\infty$.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.

Lo vamos a realizar por división entera

x^3	x^2-1
$-x^3 - x$	x
$0 -x$	

La A.O. de $f(x)$ es $y = x$ en $\pm\infty$.

Veámoslo también con límites.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{x \cdot (2x + 2)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x(x^2 - 1)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - (x)\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Efectivamente la A.O. de $f(x)$ era $y = x$ en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - (x)\right) = 0^+$, $f(x)$ está por encima de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor $+100$)

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - (x)\right) = 0^-$, $f(x)$ está por debajo de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor -100)

Si hay es este caso A.O **no hay asíntotas horizontales (A.H.)**

b)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}; f'(x) = f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot (2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 = x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0$, de donde $x^2 = 0$ y $x^2 = 3$.

Las soluciones son $x = 0$ (doble) y $x = \pm\sqrt{3} \cong \pm 1'73$, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-2) = 4/(+) > 0$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-\infty, -\sqrt{3})$

Como $f'(-0.5) = (-11/16)/(+) < 0$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-\sqrt{3}, 0) - \{-1\}$

Como $f'(0.5) = (-11/16)/(+) < 0$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(0, -\sqrt{3}) - \{1\}$

Como $f'(2) = 4/(+) > 0$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en $(+\sqrt{3}, +\infty)$

Por definición en $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo relativo que vale $f(-\sqrt{3}) = (-3\sqrt{3}) / 2$.

Por definición en $x = +\sqrt{3}$ hay un mínimo relativo que vale $f(+\sqrt{3}) = (+3\sqrt{3}) / 2$.

Ejercicio 2 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Determina la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que cumple $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ y $f''(x) = e^x(x+2)$.

Solución

Por el Teorema Fundamental del Calculo Integral (TFCI).- Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces la función $G(x) = \int_a^x [f(t)]dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = (\int_a^x [f(t)]dt)' = f(x)$

En la práctica $f(x) = \int f'(x)dx$; $f'(x) = \int f''(x)dx$; $f''(x) = \int f'''(x)dx$, etc.....

En nuestro caso:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int e^x(x+2)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+2 \Rightarrow du=dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = (x+2) \cdot e^x - \int e^x dx = (x+2) \cdot e^x - e^x + K.$$

De $f'(0) = 1$ tenemos $1 = (0+2)e^0 - e^0 + K = 2 - 1 + K = 1 + K$, luego $K = 0$ y $f'(x) = (x+2)e^x - e^x$.

$$\text{Por tanto: } f(x) = \int f'(x)dx = \int (e^x(x+2) - e^x)dx = \int e^x(x+2)dx - \int e^x dx = (x+2) \cdot e^x - e^x - e^x + L = e^x(x+2) - 2e^x + L$$

De $f(0) = 1$ tenemos $1 = (0+2)e^0 - 2e^0 + L = 0 + L$, luego $L = 1$ y la función pedida es:

$$f(x) = e^x \cdot (x+2) - 2e^x - 1 = x \cdot e^x + 1.$$

Ejercicio 3 Del Modelo 3 del 2020 (Algebra)

$$\text{Considera } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de m para los que AB no tiene inversa. (0'75 puntos)

b) Determina los valores de m para los que BA no tiene inversa. (0'75 puntos)

c) Para $m = 0$, resuelve, si es posible, el sistema dado por $BAX = C$ y halla una solución en la que $x+y+z=0$. (1 punto)

Solución

$$\text{Considera } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) y (b)

Determina los valores de m para los que AB no tiene inversa

Una matriz D no tiene inversa si su determinante es cero, es decir $\det(D) = |D| = 0$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tenemos } \det(A \cdot B) = |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2m - 2 = -2m, \text{ luego si } m = 0 \text{ } |A \cdot B| = 0 \text{ y la matriz } A \cdot B \text{ no tiene}$$

inversa.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & -1 & m-1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tenemos } \det(B \cdot A) = |B \cdot A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & -1 & m-1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{array} = -(1) \cdot (m - m) = 0, \text{ por tanto } B \cdot A \text{ no}$$

tiene inversa sea cual sea el valor de "m" porque su determinante siempre es cero.

(c)
Para $m = 0$, resuelve, si es posible, el sistema dado por $BAX = C$ y halla una solución en la que $x+y+z = 0$.

$$\text{Tenemos } BAX = C \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ -2x-y-z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Igualando miembro a miembro:}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -2x - y - z = -2 \text{ (} F_2 + F_1 \text{)} \\ 3x + y + 2z = 3 \text{ (} F_3 - F_1 \text{)} \end{cases} \approx \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 0 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \text{ Tomando } z = b \in \mathbb{R}, \text{ tenemos } x = 1 - b \text{ y entrando en la primera}$$

ecuación $2(1 - b) + y + b = 2 \rightarrow y = b$, y la solución del sistema es:

$(x, y, z) = (1 - b, b, b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

Me piden ver si hay una solución con $x + y + z = 0$.

De $1 - b + b + b = 0$, resulta $b = -1$; luego la solución que verifica $x + y + z = 0$ es $(x, y, z) = (2, -1, -1)$ que se obtiene de la general $(x, y, z) = (1 - b, b, b)$ dándole a b el valor -1 .

Ejercicio 4 Del Modelo 3 del 2020 (Geometría)

Considera los puntos $A(t, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, 3, -t - 1)$.

a) Calcula el valor o valores de t para que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D sea 5 unidades cúbicas. (1'25 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula la distancia del punto A a la recta determinada por los puntos B y C . (1'25 puntos)

Solución

Considera los puntos $A(t, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, 3, -t - 1)$.

(a)
Calcula el valor o valores de t para que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D sea 5 unidades cúbicas.

Sabemos que el volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D es un sexto del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD} , es decir un sexto del valor absoluto del producto mixto que

determinan los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD} , es decir $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$.

$\overrightarrow{AB} = (-t, -1, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (-1-t, -2, 3)$; $\overrightarrow{AD} = (2-t, 1, -t)$

$$\begin{aligned} \text{Volumen del tetredro} &= 5 \text{ u}^3 = (1/6) \cdot |[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -t & -1 & 2 \\ -1-t & -2 & 3 \\ 2-t & 1 & -t \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -t & -1 & 2 \\ -1+t & 0 & -1 \\ 2-2t & 0 & 2-t \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{array} = \\ &= (1/6) \cdot |-(1) \cdot [(t-1) \cdot (2-t) + 2 - 2t]| \text{ u}^3 = (1/6) \cdot |t^2 - t| \text{ u}^3. \end{aligned}$$

Tenemos la ecuación $|t^2 - t| = 30$, que nos dá lugar a otras dos ecuaciones:

$$+(t^2 - t) = 30 \rightarrow t^2 - t - 30 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}, \text{ de donde } t = -5 \text{ y } t = 6.$$

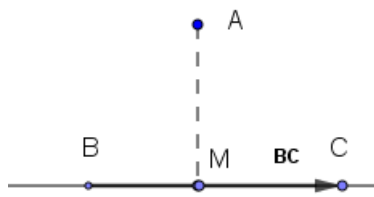
$$-(t^2 - t) = 30 \rightarrow -t^2 + t - 30 = 0 \rightarrow t^2 - t + 30 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 120}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-119}}{2}, \text{ que no tiene soluciones}$$

reales por tanto las únicas soluciones para "t" son $t = -5$ y $t = 6$.

(b)

Para $t = 0$, calcula la distancia del punto A a la recta determinada por los puntos B y C . (1'25 puntos)

Los puntos son: $A(0, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$



Ponemos la recta BC en forma vectorial. Punto B(0, 1, 1) y vector $\mathbf{BC} = (-1, -1, 1)$. La recta BC es la siguiente: $BC \equiv (x, y, z) = (-b, 1 - b, 1 + b)$ con $b \in \mathbb{R}$. Un vector director de BC es $\mathbf{BC} = (-1, -1, 1)$.

Calculamos la proyección ortogonal del punto A sobre la recta BC, para lo cual tomamos el punto genérico M de la recta BC, formamos el vector \mathbf{AM} , y le imponemos la condición de perpendicularidad a dos vectores, uno el \mathbf{PM} y otro el director \mathbf{BC} de la recta "BC". Obtenemos el punto M, y la distancia del punto A a la recta BC será el módulo del vector \mathbf{AM} .

Punto genérico de la recta "BC", $M(-b, 1 - b, 1 + b)$, formamos el vector $\mathbf{AM} = (-b, -1 - b, 2 + b)$, le imponemos la condición de que sea perpendicular a la recta "BC" es decir a su vector de dirección $\mathbf{BC} = (-1, -1, 1)$, por tanto $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{BC} = 0 \rightarrow (-b, -1 - b, 2 + b) \cdot (-1, -1, 1) = 0 = b + 1 + b + 2 + b = 0$, de donde $3b = -3$, es decir $b = -1$, y M es $M((-1), -1 - (-1), 1 + (-1)) = M(1, 0, 0)$; y el vector \mathbf{AM} es $\mathbf{AM} = (1, 0, 1)$

La distancia pedida es $\|\mathbf{AM}\| = \sqrt{(1^2 + 0^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$.

Ejercicio 5 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto crítico en $x = 0$, que su gráfica pasa por $(0, 3)$ y que la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula a, b, c y d .

Solución

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto crítico en $x = 0$, que su gráfica pasa por $(0, 3)$ y que la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula a, b, c y d .

Como f tiene un punto crítico en $x = 0$ tenemos $f'(0) = 0$, como pasa por el punto $(0, 3)$ tenemos $f(0) = 3$, como la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$, tenemos $f'(1) = y' = -2$. Como la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$, tenemos $f(1) = y(1) = 0$.

Tenemos: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

De $f'(0) = 0$ tenemos $0 = 0 + 0 + c$, luego $c = 0$.

De $f(0) = 3$ tenemos $3 = 0 + 0 + d$, luego $d = 3$.

De $f'(1) = -2$ tenemos $-2 = 3a + 2b$.

De $f(1) = 0$ tenemos $0 = a + b + 3$, luego $a = -3 - b$, de donde $-2 = 3(-3 - b) + 2b = -9 - b$, es decir $b = -7$ y por tanto $a = -3 + 7 = 4$.

La función pedida es $f(x) = 4x^3 - 7bx^2 + 3$.

Ejercicio 6 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Calcula el valor de $a > 0$ para que el área comprendida entre la parábola $y = 3x^2 - 2ax$ y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

Solución

Calcula el valor de $a > 0$ para que el área comprendida entre la parábola $y = 3x^2 - 2ax$ y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

La gráfica de $y = 3x^2 - 2ax$ es una parábola así (\cup) porque el número que multiplica a x^2 es positivo.

Cortes con los ejes:

Si $x = 0$, punto $(0,0)$

Si $y(x) = 0 = 3x^2 - 2ax = 0 = x \cdot (3x - 2a)$ de donde $x = 0$ y $3x - 2a = 0$, es decir $x = 2a/3$ luego los límites de integración son 0 y $2a/3$.

$$\text{Área} = 4 \text{ u}^2 = \left| \int_0^{2a/3} (3x^2 - 2ax) dx \right| = \left| \left[x^3 - ax^2 \right]_0^{2a/3} \right| = \left| 8a^3/27 - 4a^3/9 \right| = \left| -4a^3/27 \right| = (4/27) \cdot a^3.$$

De $4 = (4/27)a^3$ tenemos $a^3 = 27$, luego $a = \sqrt[3]{27} = 3$.

Ejercicio 7 Del Modelo 3 del 2020 (Algebra)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que una matriz X verifica que $X^3AX = B^2$, halla los posibles valores de su determinante. (1 punto)
b) Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1} = A$. (1'5 puntos)

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- (a)
Sabido que una matriz X verifica que $X^3AX = B^2$, halla los posibles valores de su determinante.

$$\text{Tenemos } \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad \det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2.$$

De $\det(X^3AX) = \det(B^2)$ tenemos usando {i}: $(\det(X))^3 \cdot \det(A) \cdot \det(X) = (\det(B))^2 \rightarrow \det(X)^4 \cdot 1 = (-2)^2$; es decir $(\det(X))^4 = 4$, luego $\det(X) = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt[2]{2} \cong \pm 1'41421356$.

Propiedad usada:

- (i) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(b)

Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1} = A$. (1'5 puntos)

Hemos visto que tanto A como B tienen inversa porque sus determinantes son distintos de cero.

Multiplicando la expresión $A^2YB^{-1} = A$ por la izquierda por $(A^2)^{-1}$ y por la derecha por B tenemos:

$$(A^2)^{-1} \cdot A^2YB^{-1} \cdot B = (A^2)^{-1} \cdot A \cdot B \rightarrow I \cdot Y \cdot I = A^{-1} \cdot B, \text{ de donde } Y = A^{-1} \cdot B.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8 Del Modelo 3 del 2020 (Geometría)

Considera el punto $A(0, 1, -2)$ y los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$.

- a) Halla el punto simétrico de A respecto de π_1 . (1'5 puntos)
b) Determina la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y π_2 . (1 punto)

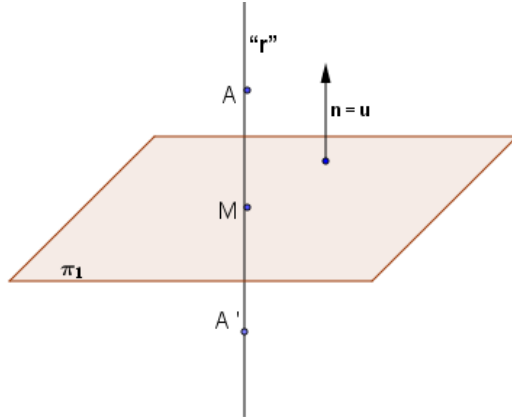
Solución

Considera el punto $A(0, 1, -2)$ y los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$.

(a)

Halla el punto simétrico de A respecto de π_1 .

Tenemos que obtener la proyección ortogonal M de A sobre π_1 , para lo cual calculamos la recta "r" perpendicular (\perp), al plano π_1 (el vector director \mathbf{u} de la recta "r" es el vector normal \mathbf{n}_1 del plano π_1) por el punto A . Determinamos el punto proyección $M = s \cap \pi_1$, y la proyección M es el punto medio del segmento AA' , donde A' es el simétrico pedido.



Del plano $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$, tenemos su vector normal $\mathbf{n}_1 = (2, -1, -1)$.
 La recta \perp es " $r(A; \mathbf{u}) = r(A; \mathbf{n}_1)$ " con $A(0, 1, -2)$ y $\mathbf{n}_1 = (2, -1, -1)$.

Su ecuación vectorial es $r \equiv (x, y, z) = (2b, 1 - b, -2 - b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

$M = r \cap \pi$, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro " b ", y luego el punto M .

$2(2b) - (1 - b) - (-2 - b) + 5 = 0$, de donde $6b + 6 = 0$, por tanto $\mathbf{b} = -1$ y el punto M es:
 $M(2(-1), 1 - (-1), -2 - (-1)) = M(-2, 2, -1)$.

M es el punto medio del segmento AA' , donde A' es el simétrico pedido.

$(-2, 2, -1) = ((0 + x)/2, (1 + y)/2, (-2 + z)/2)$, de donde:

$-2 = (0 + x)/2$, es decir $\mathbf{x} = -4$.
 $2 = (1 + y)/2$, es decir $\mathbf{y} = 4 - 1 = 3$.
 $-1 = (-2 + z)/2$, es decir $\mathbf{z} = -2 + 2 = 0$.

El simétrico pedido es $A'(-4, 3, 0)$.

(b)

Determina la recta que pasa por A y es paralela a $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$.

Como me piden una recta " s " que sea paralela a los dos planos, la recta " s " no corta a ninguno de los dos planos, luego me sirve como vector director \mathbf{u} el de la recta " s " el producto vectorial (\times) de los vectores normales de cada plano, es decir $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.

Recta " s ", punto el $A(0, 1, -2)$, vector $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ Adjuntos
 primera = $\mathbf{i}(6+5) - \mathbf{j}(-12+1) + \mathbf{k}(10+1) =$
 fila

$= (11, 11, 11) \equiv (1, 1, 1)$, por tanto **la recta pedida " s " en forma vectorial es:**

$t \equiv (x, y, z) = (p, 1 + p, -2 + p)$ con $p \in \mathbb{R}$.