

### Ejercicio 1 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Considera la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$  para  $x \neq 1, -1$ .

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ . (1'25 puntos)

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ . (1'25 puntos)

#### Solución

Considera la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$  para  $x \neq 1, -1$ .

(a)

Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

$x = a$  es una asíntota vertical (A.V.) de  $f(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$

Como  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ ; la recta  $x = -1$  es una A.V. de la gráfica de  $f(x)$ .

Posición relativa  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ ; la recta  $x = 1$  es una A.V. de la gráfica de  $f(x)$ .

Posición relativa  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ .

Como la función  $f$  es un cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador una unidad más que el grado del denominador,  $f(x)$  tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma  $y = mx + n$  con

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$  y  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ , y es la misma en  $+\infty$  y en  $-\infty$ . Como hay A.O en  $\pm\infty$ ,  $f$  no tiene

asíntotas horizontales (A.H.) en  $\pm\infty$ .

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.

Lo vamos a realizar por división entera

$x^3$	$x^2-1$
$-x^3 - x$	$x$
$0 -x$	

**La A.O. de  $f(x)$  es  $y = x$  en  $\pm\infty$ .**

Veámoslo también con límites.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{x \cdot (2x + 2)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x(x^2 - 1)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - (x)\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Efectivamente la A.O. de  $f(x)$  era  $y = x$  en  $\pm\infty$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - (x)\right) = 0^+$ ,  $f(x)$  está por encima de la A.O. en  $+\infty$  (le damos a  $x$  el valor  $+100$ )

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - (x)\right) = 0^-$ ,  $f(x)$  está por debajo de la A.O. en  $-\infty$  (le damos a  $x$  el valor  $-100$ )

Si hay es este caso A.O **no hay asíntotas horizontales (A.H.)**

b)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de  $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}; f'(x) = f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot (2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Si  $f'(x) = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 = x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0$ , de donde  $x^2 = 0$  y  $x^2 = 3$ .

Las soluciones son  $x = 0$  (doble) y  $x = \pm\sqrt{3} \cong \pm 1'73$ , que serán los posibles extremos relativos.

Como  $f'(-2) = 4/(+) > 0$ , luego  $f(x)$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(-\infty, -\sqrt{3})$

Como  $f'(-0.5) = (-11/16)/(+) < 0$ , luego  $f(x)$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(-\sqrt{3}, 0) - \{-1\}$

Como  $f'(0.5) = (-11/16)/(+) < 0$ , luego  $f(x)$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(0, -\sqrt{3}) - \{1\}$

Como  $f'(2) = 4/(+) > 0$ , luego  $f(x)$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(+\sqrt{3}, +\infty)$

Por definición en  $x = -\sqrt{3}$  hay un máximo relativo que vale  $f(-\sqrt{3}) = (-3\sqrt{3}) / 2$ .

Por definición en  $x = +\sqrt{3}$  hay un mínimo relativo que vale  $f(+\sqrt{3}) = (+3\sqrt{3}) / 2$ .

### Ejercicio 2 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Determina la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que cumple  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 1$  y  $f''(x) = e^x(x+2)$ .

#### Solución

Por el Teorema Fundamental del Calculo Integral (TFCI).- Si  $f(x)$  es continua en  $[a,b]$  entonces la función  $G(x) = \int_a^x [f(t)]dt$  es derivable y su derivada es  $G'(x) = (\int_a^x [f(t)]dt)' = f(x)$

En la práctica  $f(x) = \int f'(x)dx$ ;  $f'(x) = \int f''(x)dx$ ;  $f''(x) = \int f'''(x)dx$ , etc.....

En nuestro caso:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int e^x(x+2)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+2 \Rightarrow du=dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = (x+2) \cdot e^x - \int e^x dx = (x+2) \cdot e^x - e^x + K.$$

De  $f'(0) = 1$  tenemos  $1 = (0+2)e^0 - e^0 + K = 2 - 1 + K = 1 + K$ , luego  $K = 0$  y  $f'(x) = (x+2)e^x - e^x$ .

$$\text{Por tanto: } f(x) = \int f'(x)dx = \int (e^x(x+2) - e^x)dx = \int e^x(x+2)dx - \int e^x dx = (x+2) \cdot e^x - e^x - e^x + L = e^x(x+2) - 2e^x + L$$

De  $f(0) = 1$  tenemos  $1 = (0+2)e^0 - 2e^0 + L = 0 + L$ , luego  $L = 1$  y la función pedida es:

$$f(x) = e^x \cdot (x+2) - 2e^x - 1 = x \cdot e^x + 1.$$

### Ejercicio 3 Del Modelo 3 del 2020 (Algebra)

$$\text{Considera } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de  $m$  para los que  $AB$  no tiene inversa. (0'75 puntos)

b) Determina los valores de  $m$  para los que  $BA$  no tiene inversa. (0'75 puntos)

c) Para  $m = 0$ , resuelve, si es posible, el sistema dado por  $BAX = C$  y halla una solución en la que  $x+y+z=0$ . (1 punto)

#### Solución

$$\text{Considera } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) y (b)

Determina los valores de  $m$  para los que  $AB$  no tiene inversa

Una matriz  $D$  no tiene inversa si su determinante es cero, es decir  $\det(D) = |D| = 0$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos  $\det(A \cdot B) = |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2m - 2 = -2m$ , luego si  $m = 0$   $|A \cdot B| = 0$  y la matriz  $A \cdot B$  no tiene

inversa.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & -1 & m-1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tenemos } \det(B \cdot A) = |B \cdot A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & -1 & m-1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{array} = -(1) \cdot (m - m) = 0, \text{ por tanto } B \cdot A \text{ no}$$

tiene inversa sea cual sea el valor de "m" porque su determinante siempre es cero.

(c)  
Para  $m = 0$ , resuelve, si es posible, el sistema dado por  $BAX = C$  y halla una solución en la que  $x+y+z = 0$ .

$$\text{Tenemos } BAX = C \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ -2x-y-z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Igualando miembro a miembro:}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -2x - y - z = -2 \text{ (} F_2 + F_1 \text{)} \\ 3x + y + 2z = 3 \text{ (} F_3 - F_1 \text{)} \end{cases} \approx \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 0 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \text{ Tomando } z = b \in \mathbb{R}, \text{ tenemos } x = 1 - b \text{ y entrando en la primera}$$

ecuación  $2(1 - b) + y + b = 2 \rightarrow y = b$ , y la solución del sistema es:

$(x, y, z) = (1 - b, b, b)$  con  $b \in \mathbb{R}$ .

Me piden ver si hay una solución con  $x + y + z = 0$ .

De  $1 - b + b + b = 0$ , resulta  $b = -1$ ; luego la solución que verifica  $x + y + z = 0$  es  $(x, y, z) = (2, -1, -1)$  que se obtiene de la general  $(x, y, z) = (1 - b, b, b)$  dándole a  $b$  el valor  $-1$ .

#### Ejercicio 4 Del Modelo 3 del 2020 (Geometría)

Considera los puntos  $A(t, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 2)$  y  $D(2, 3, -t - 1)$ .

a) Calcula el valor o valores de  $t$  para que el volumen del tetraedro de vértices  $A, B, C, D$  sea 5 unidades cúbicas. (1'25 puntos)

b) Para  $t = 0$ , calcula la distancia del punto  $A$  a la recta determinada por los puntos  $B$  y  $C$ . (1'25 puntos)

#### Solución

Considera los puntos  $A(t, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 2)$  y  $D(2, 3, -t - 1)$ .

(a)  
Calcula el valor o valores de  $t$  para que el volumen del tetraedro de vértices  $A, B, C, D$  sea 5 unidades cúbicas.

Sabemos que el volumen de un tetraedro de vértices  $A, B, C$  y  $D$  es un sexto del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{AD}$ , es decir un sexto del valor absoluto del producto mixto que

determinan los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{AD}$ , es decir  $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$ .

$\overrightarrow{AB} = (-t, -1, 2)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (-1-t, -2, 3)$ ;  $\overrightarrow{AD} = (2-t, 1, -t)$

$$\begin{aligned} \text{Volumen del tetredro} &= 5 u^3 = (1/6) \cdot |[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -t & -1 & 2 \\ -1-t & -2 & 3 \\ 2-t & 1 & -t \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -t & -1 & 2 \\ -1+t & 0 & -1 \\ 2-2t & 0 & 2-t \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{array} = \\ &= (1/6) \cdot |-(1) \cdot [(t-1) \cdot (2-t) + 2 - 2t]| u^3 = (1/6) \cdot |t^2 - t| u^3. \end{aligned}$$

Tenemos la ecuación  $|t^2 - t| = 30$ , que nos dá lugar a otras dos ecuaciones:

$$+(t^2 - t) = 30 \rightarrow t^2 - t - 30 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}, \text{ de donde } t = -5 \text{ y } t = 6.$$

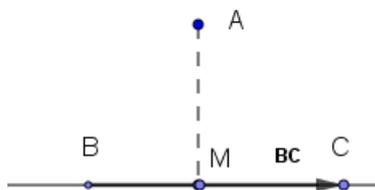
$$-(t^2 - t) = 30 \rightarrow -t^2 + t - 30 = 0 \rightarrow t^2 - t + 30 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 120}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-119}}{2}, \text{ que no tiene soluciones}$$

reales por tanto las únicas soluciones para "t" son  $t = -5$  y  $t = 6$ .

(b)

Para  $t = 0$ , calcula la distancia del punto  $A$  a la recta determinada por los puntos  $B$  y  $C$ . (1'25 puntos)

Los puntos son:  $A(0, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 2)$



Ponemos la recta BC en forma vectorial. Punto B(0, 1, 1) y vector  $\mathbf{BC} = (-1, -1, 1)$ . La recta BC es la siguiente:  $BC \equiv (x, y, z) = (-b, 1 - b, 1 + b)$  con  $b \in \mathbb{R}$ . Un vector director de BC es  $\mathbf{BC} = (-1, -1, 1)$ .

Calculamos la proyección ortogonal del punto A sobre la recta BC, para lo cual tomamos el punto genérico M de la recta BC, formamos el vector  $\mathbf{AM}$ , y le imponemos la condición de perpendicularidad a dos vectores, uno el  $\mathbf{PM}$  y otro el director  $\mathbf{BC}$  de la recta "BC". Obtenemos el punto M, y la distancia del punto A a la recta BC será el módulo del vector  $\mathbf{AM}$ .

Punto genérico de la recta "BC",  $M(-b, 1 - b, 1 + b)$ , formamos el vector  $\mathbf{AM} = (-b, -1 - b, 2 + b)$ , le imponemos la condición de que sea perpendicular a la recta "BC" es decir a su vector de dirección  $\mathbf{BC} = (-1, -1, 1)$ , por tanto  $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{BC} = 0 \rightarrow (-b, -1 - b, 2 + b) \cdot (-1, -1, 1) = 0 = b + 1 + b + 2 + b = 0$ , de donde  $3b = -3$ , es decir  $b = -1$ , y M es  $M((-1), -1 - (-1), 1 + (-1)) = M(1, 0, 0)$ ; y el vector  $\mathbf{AM}$  es  $\mathbf{AM} = (1, 0, 1)$

La distancia pedida es  $\|\mathbf{AM}\| = \sqrt{(1^2 + 0^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$ .

### Ejercicio 5 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene un punto crítico en  $x = 0$ , que su gráfica pasa por  $(0, 3)$  y que la recta  $y = -2x + 2$  es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa  $x = 1$ . Calcula  $a, b, c$  y  $d$ .

#### Solución

Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene un punto crítico en  $x = 0$ , que su gráfica pasa por  $(0, 3)$  y que la recta  $y = -2x + 2$  es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa  $x = 1$ . Calcula  $a, b, c$  y  $d$ .

Como  $f$  tiene un punto crítico en  $x = 0$  tenemos  $f'(0) = 0$ , como pasa por el punto  $(0, 3)$  tenemos  $f(0) = 3$ , como la recta  $y = -2x + 2$  es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa  $x = 1$ , tenemos  $f'(1) = y' = -2$ . Como la recta  $y = -2x + 2$  es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa  $x = 1$ , tenemos  $f(1) = y(1) = 0$ .

Tenemos:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ;  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

De  $f'(0) = 0$  tenemos  $0 = 0 + 0 + c$ , luego  $c = 0$ .

De  $f(0) = 3$  tenemos  $3 = 0 + 0 + d$ , luego  $d = 3$ .

De  $f'(1) = -2$  tenemos  $-2 = 3a + 2b$ .

De  $f(1) = 0$  tenemos  $0 = a + b + 3$ , luego  $a = -3 - b$ , de donde  $-2 = 3(-3 - b) + 2b = -9 - b$ , es decir  $b = -7$  y por tanto  $a = -3 + 7 = 4$ .

La función pedida es  $f(x) = 4x^3 - 7bx^2 + 3$ .

### Ejercicio 6 Del Modelo 3 del 2020 (Análisis)

Calcula el valor de  $a > 0$  para que el área comprendida entre la parábola  $y = 3x^2 - 2ax$  y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

#### Solución

Calcula el valor de  $a > 0$  para que el área comprendida entre la parábola  $y = 3x^2 - 2ax$  y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

La gráfica de  $y = 3x^2 - 2ax$  es una parábola así ( $\cup$ ) porque el número que multiplica a  $x^2$  es positivo.

Cortes con los ejes:

Si  $x = 0$ , punto  $(0,0)$

Si  $y(x) = 0 = 3x^2 - 2ax = 0 = x \cdot (3x - 2a)$  de donde  $x = 0$  y  $3x - 2a = 0$ , es decir  $x = 2a/3$  luego los límites de integración son 0 y  $2a/3$ .

$$\text{Área} = 4 \text{ u}^2 = \left| \int_0^{2a/3} (3x^2 - 2ax) dx \right| = \left| \left[ x^3 - ax^2 \right]_0^{2a/3} \right| = \left| 8a^3/27 - 4a^3/9 \right| = \left| -4a^3/27 \right| = (4/27) \cdot a^3.$$

De  $4 = (4/27)a^3$  tenemos  $a^3 = 27$ , luego  $a = \sqrt[3]{27} = 3$ .

### Ejercicio 7 Del Modelo 3 del 2020 (Algebra)

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que una matriz  $X$  verifica que  $X^3AX = B^2$ , halla los posibles valores de su determinante. (1 punto)  
b) Determina, si existe, una matriz  $Y$  que verifique  $A^2YB^{-1} = A$ . (1'5 puntos)

#### Solución

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- (a)  
Sabido que una matriz  $X$  verifica que  $X^3AX = B^2$ , halla los posibles valores de su determinante.

$$\text{Tenemos } \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad \det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2.$$

De  $\det(X^3AX) = \det(B^2)$  tenemos usando {i}:  $(\det(X))^3 \cdot \det(A) \cdot \det(X) = (\det(B))^2 \rightarrow \det(X)^4 \cdot 1 = (-2)^2$ ; es decir  $(\det(X))^4 = 4$ , luego  $\det(X) = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt[2]{2} \cong \pm 1'41421356$ .

Propiedad usada:

- (i) Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas del mismo orden entonces  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

(b)

Determina, si existe, una matriz  $Y$  que verifique  $A^2YB^{-1} = A$ . (1'5 puntos)

Hemos visto que tanto  $A$  como  $B$  tienen inversa porque sus determinantes son distintos de cero.

Multiplicando la expresión  $A^2YB^{-1} = A$  por la izquierda por  $(A^2)^{-1}$  y por la derecha por  $B$  tenemos:

$$(A^2)^{-1} \cdot A^2YB^{-1} \cdot B = (A^2)^{-1} \cdot A \cdot B \rightarrow I \cdot Y \cdot I = A^{-1} \cdot B, \text{ de donde } Y = A^{-1} \cdot B.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Ejercicio 8 Del Modelo 3 del 2020 (Geometría)

Considera el punto  $A(0, 1, -2)$  y los planos  $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$  y  $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$ .

- a) Halla el punto simétrico de  $A$  respecto de  $\pi_1$ . (1'5 puntos)  
b) Determina la recta que pasa por  $A$  y es paralela a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . (1 punto)

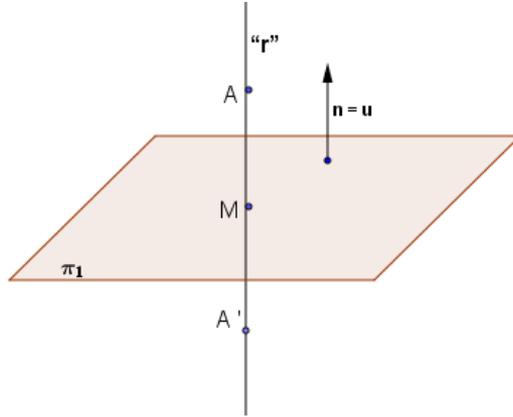
#### Solución

Considera el punto  $A(0, 1, -2)$  y los planos  $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$  y  $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$ .

(a)

Halla el punto simétrico de  $A$  respecto de  $\pi_1$ .

Tenemos que obtener la proyección ortogonal  $M$  de  $A$  sobre  $\pi_1$ , para lo cual calculamos la recta "r" perpendicular ( $\perp$ ), al plano  $\pi_1$  (el vector director  $\mathbf{u}$  de la recta "r" es el vector normal  $\mathbf{n}_1$  del plano  $\pi_1$ ) por el punto  $A$ . Determinamos el punto proyección  $M = s \cap \pi_1$ , y la proyección  $M$  es el punto medio del segmento  $AA'$ , donde  $A'$  es el simétrico pedido.



Del plano  $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$ , tenemos su vector normal  $\mathbf{n}_1 = (2, -1, -1)$ .  
 La recta  $\perp$  es " $r(A; \mathbf{u}) = r(A; \mathbf{n}_1)$ " con  $A(0, 1, -2)$  y  $\mathbf{n}_1 = (2, -1, -1)$ .

Su ecuación vectorial es  $r \equiv (x, y, z) = (2b, 1 - b, -2 - b)$  con  $b \in \mathbb{R}$ .

$M = r \cap \pi$ , sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro " $b$ ", y luego el punto  $M$ .

$2(2b) - (1 - b) - (-2 - b) + 5 = 0$ , de donde  $6b + 6 = 0$ , por tanto  $\mathbf{b} = -1$  y el punto  $M$  es:  
 $M(2(-1), 1 - (-1), -2 - (-1)) = M(-2, 2, -1)$ .

$M$  es el punto medio del segmento  $AA'$ , donde  $A'$  es el simétrico pedido.

$(-2, 2, -1) = ((0 + x)/2, (1 + y)/2, (-2 + z)/2)$ , de donde:

$-2 = (0 + x)/2$ , es decir  $\mathbf{x} = -4$ .  
 $2 = (1 + y)/2$ , es decir  $\mathbf{y} = 4 - 1 = 3$ .  
 $-1 = (-2 + z)/2$ , es decir  $\mathbf{z} = -2 + 2 = 0$ .

**El simétrico pedido es  $A'(-4, 3, 0)$ .**

(b)

Determina la recta que pasa por  $A$  y es paralela a  $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$  y  $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$ .

Como me piden una recta " $s$ " que sea paralela a los dos planos, la recta " $s$ " no corta a ninguno de los dos planos, luego me sirve como vector director  $\mathbf{u}$  el de la recta " $s$ " el producto vectorial ( $\times$ ) de los vectores normales de cada plano, es decir  $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ .

$$\text{Recta "s", punto el } A(0, 1, -2), \text{ vector } \mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = \mathbf{i}(6+5) - \mathbf{j}(-12+1) + \mathbf{k}(10+1) = \\ \text{fila} \end{array}$$

$= (11, 11, 11) \equiv (1, 1, 1)$ , por tanto **la recta pedida " $s$ " en forma vectorial es:**

**$t \equiv (x, y, z) = (p, 1 + p, -2 + p)$  con  $p \in \mathbb{R}$ .**